5

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

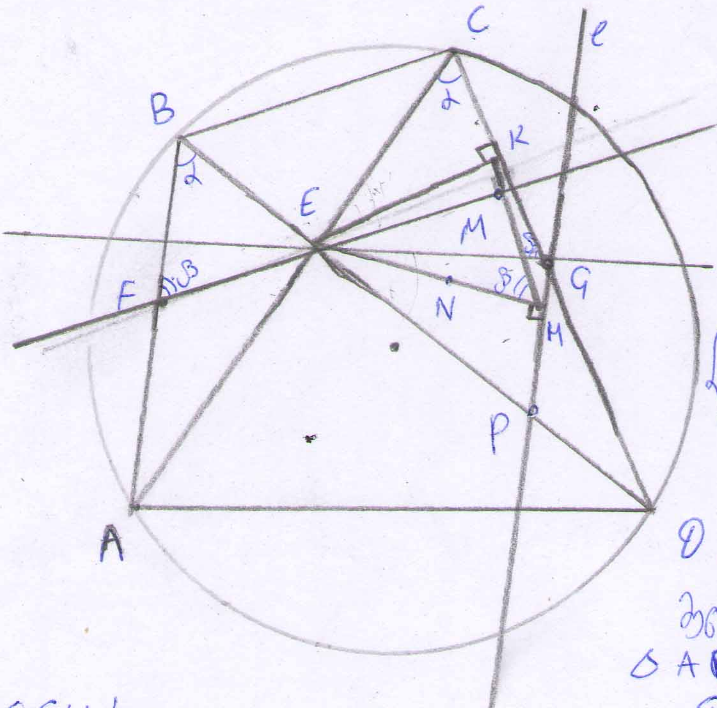
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/008

ამოცანა № 1

გვერდი № 1



$\angle ABD = \alpha$

$\square ABCD$ ჩახაზულია $\Rightarrow \angle ACD = \alpha$

$\angle CEK = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$

$AB \parallel l \Rightarrow \angle ABD = \angle EPH = \alpha$

$\angle HEP = 90 - \alpha = \angle CEK$

$\left\{\begin{array}{l}\angle ABE = \angle DCE \\ \angle BAE = \angle CDE\end{array}\right| \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle DCE$

მსგავს $\triangle$-ებში გავლებულია შესაბამისი EF და EG მედიანები ამიტომ

$\triangle AFE \sim \triangle DGE \Rightarrow \angle AEF = \angle DEG$

$\angle AEF = \angle CEM \Rightarrow \angle CEM = \angle DEG$

$\angle CEK = \angle DEH$

$\angle CEM - \angle CEK = \angle DEG - \angle DEH$

$\boxed{\angle KEM = \angle HEG}$

$\angle BFE = \beta \quad \triangle ABE \sim \triangle DCE \Rightarrow \angle EGC = \beta$

$\square EKGH$ ჩახაზულია $\Rightarrow \angle EGK = \angle EHK = \beta$

$\angle KEG = 180 - 90 - \angle EGK = 90 - \beta = \angle KEM + \angle MEG = \angle HEG + \angle MEG =$

$= \angle MEH$

$\left.\begin{array}{l}\angle MEH = 90 - \beta \\ \angle MHE = \beta\end{array}\right| \Rightarrow \angle EMH = 90^\circ$ და ვინაიდან მართკუთხა სამკუთხედში მედიანა ჰიპოტენუზის ნახევრის ტოლია, რადგან სამკუთხედზე ეს წერტილი შემო-ხაზვით $MN = R$ და $EH = 2R \Rightarrow EH = 2MN$ რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/008

ამოცანა № 2

გვერდი № 1

ეს 2012 პიროვნება დავყოთ 3 ჯგუფად. I ჯგუფში შევიყვანოთ ადამიანები ნომრით 1–671 ინკლუზიურად. II ჯგუფში შევიყვანოთ ადამიანები ნომრით 672–1342 ჩათვლით და III ჯგუფში ნომრით 1343–2012. ~~ნაცნობობა აღვნიშნოთ მიმართული ისრებით.~~ განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა თითოეული ჯგუფის თითოეული წევრი იცნობს ყველა იმ პიროვნებას, რომელიც მის ჯგუფში არ არის. ანუ I ჯგუფში ყველა იცნობს II და III-ში ყველას. II-დან ყველა იცნობს I და III-ში ყველას და III-დან ყველა იცნობს I-დან და II-დან ყველას. და ახლა დავუმტკიცოთ, რომ ამ შემთხვევაში არ მოიძებნება ოთხი ადამიანი რომ ყველა ყველას იცნობდეს.

ნამდვილად. 4 ადამიანი რომ ავიღოთ, რადგან სულ 3 ჯგუფი გვაქვს ~~[illegible]~~ სულ მცირე 2 მათგან ერთ ჯგუფში აღმოჩნდება და მათი აღნიშნული პირობიდან გამომდინარე ისინი ერთმანეთს არ იცნობენ. ანუ მოიძებნა წყვილი, ისეთი რომ ერთმანეთს არ იცნობენ.

ამასთან არ ირღვევა ამოცანის პირობაში მოცემული ფაქტი, რომ თითოეულს ჰყავს ზუსტად 1341 ნაცნობი, რადგან:

I ჯგუფში არის 671 კაცი
II-ში – 671
III-ში – 670.

ნამდვილად 2-ის ჯამი მეტია ან ტოლი 1341-ზე. რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

21.04.2012/ მათ/ I/ 008

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

უსგ$(a,b)=k$.

$\begin{cases} a=kp & k,p,q\in \mathbb{Z} \\ b=kq & \text{უსგ}(p,q)=1. \end{cases}$

$a-b=a^n\cdot c-b^n\cdot d.$

$kp-kq=k^np^n\cdot c-k^nq^n\cdot d$

$k(p-q)=k^n(p^n\cdot c-q^n\cdot d)$

$c=d\pm 1.$

$p^n\cdot c-q^n\cdot d=p^n(d\pm 1)-q^n\cdot d=d(p^n-q^n)\pm p^n$

$k(p-q)=k^n(d(p^n-q^n)\pm p^n)$

$p-q=k^{n-1}(d(p-q)\underbrace{(p^{n-1}-p^{n-2}q+\dots+q^{n-1})}_{\equiv x}\pm p^n)$

თუ მოვახდენთ k-ზე შეკვეცას და გამოვტოვებთ შემთხვევას, როცა $k=0$, ამ შემთხვევაში კი $a=0$ და $b=0$. $\sqrt[n]{0}=0\in\mathbb{Z}$. ანუ ამ შემთხვევაში სწორია.

უსგ$(p-q;d(p-q)x\pm p^n)=$ უსგ$(p-q;p^n)$

ვთქვათ უსგ$(p-q;p^n)>1$ მაშინ იარსებებს ის უმცირესი მარტივი t რიცხვი p^n-ის და $p-q$-ს გამყოფი. საიდან $p^n\vdots t \Rightarrow p\vdots t$ რადგან t მარტივია. რადგან უსგ$(p;q)=1 \Rightarrow q \not\vdots\, t \Rightarrow (p-q)\not\vdots\, t$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ანუ უსგ$(p-q;p^n)=1 \Rightarrow p-q=k^{n-1}$ და $d(p-q)x\pm p^n=\pm 1$

$k(p-q)=k^n=a-b$

$a-b=k^n \Rightarrow \sqrt[n]{|a-b|}=\sqrt[n]{|k^n|}=|k|\in\mathbb{Z}$. რ.დ.გ.